Physics I

For

1st Year Students of Engineering

الباب الثاني

الكميات الفيزيائية القياسية والمتجهة

Vector and scalar physical quantities

2-1 الكميات الفيزيائية تنقسم إلى نوعين هامين هما :

أـ الكميات القياسية: هي الكميات التي يمكن تحديدها تحديدا تاما بمعرفة مقدارها فقط ومن أمثلتها الكتلة ، الحجم ، الكثافة ، درجة الحرارة ، الجهد الكهربي ، الشغل الميكانيكي ... إلخ والكميات الفيزيائية القياسية تنطبق عليها قواعد الجبر العادية من جمع وطرح وقسمه وخلافه.

ب ـ الكميات المتجهة: هي الكميات التي يلزم لتحديدها كل من مقدارها وإتجاهها . ومن أمثلتها السرعة ، العجلة ، القوة ، الإجهاد ، المجال الكهربي ... إلخ .

$$\boldsymbol{a} = a\hat{a}$$

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\hat{a}$$

متجه الوحدة.

$$\therefore \qquad \hat{a} = \frac{\boldsymbol{a}}{a} \quad \text{أو} \quad \hat{a} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \qquad (2-1)$$

2-2 جمع وطرح المتجهات:

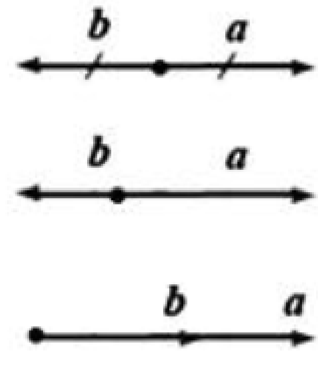
$$(i) \quad \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) = 0$$

$$(ii) \quad \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) = (a - b)\hat{a}$$

$$(iii) \quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = a\hat{a} + b\hat{b} = (a + b)\hat{a} = (a + b)\hat{b}$$

$$(iv) \quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \sqrt{(a^2 + b^2)}\ \hat{c}$$

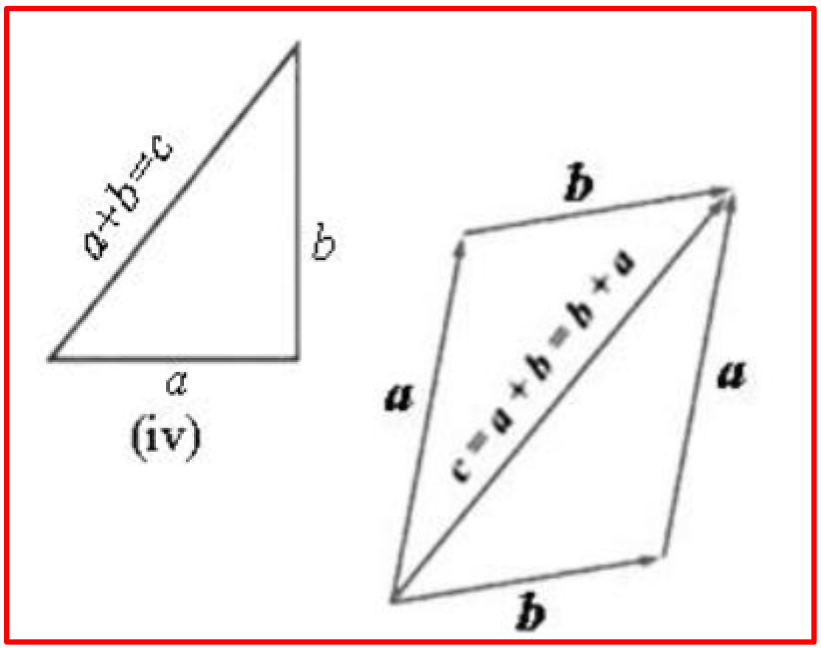
$$(v) \quad \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}\ \hat{k}$$

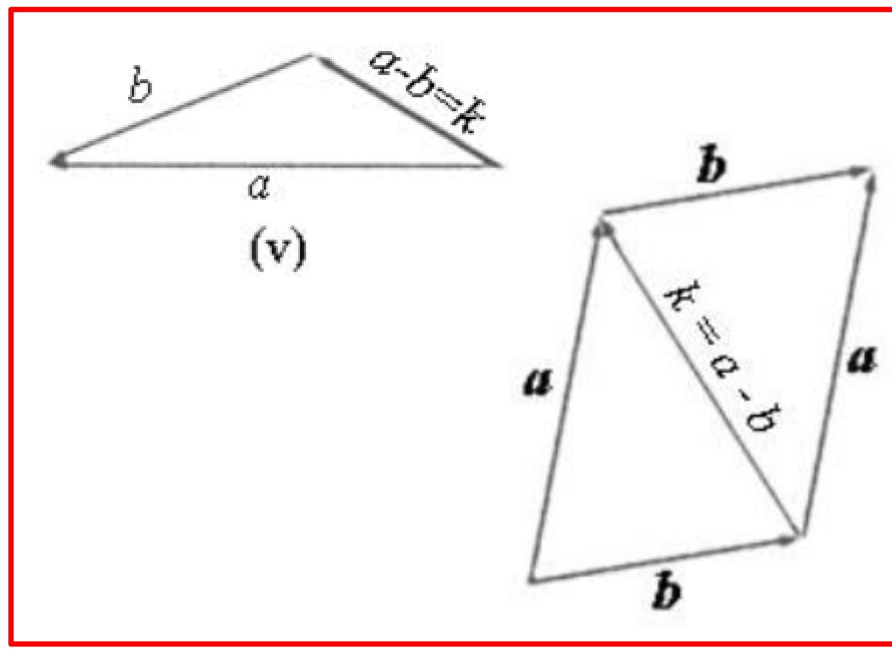


(i)

(ii)

(iii)





بعض القوانين الهامة للمتجهات:

إذا كان $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\boldsymbol{c}$ كميات متجهة & a ، b كميات قياسية فإن :

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ يسمى قانون تبادل الحدود في الجمع

$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ يسمى قانون ترتيب الحدود في الجمع

$a(b\boldsymbol{a})=(ab)\boldsymbol{a}=b(a\boldsymbol{a})$ يسمى قانون ترتيب الحدود في الضرب

$$\left.\begin{array}{l} a(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=a\boldsymbol{a}+a\boldsymbol{b} \\ (a+b)\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{a}+b\boldsymbol{a} \end{array}\right\}$$ يسمى قانون توزيع الحدود

متجهات الوحدة الكارتيزية :

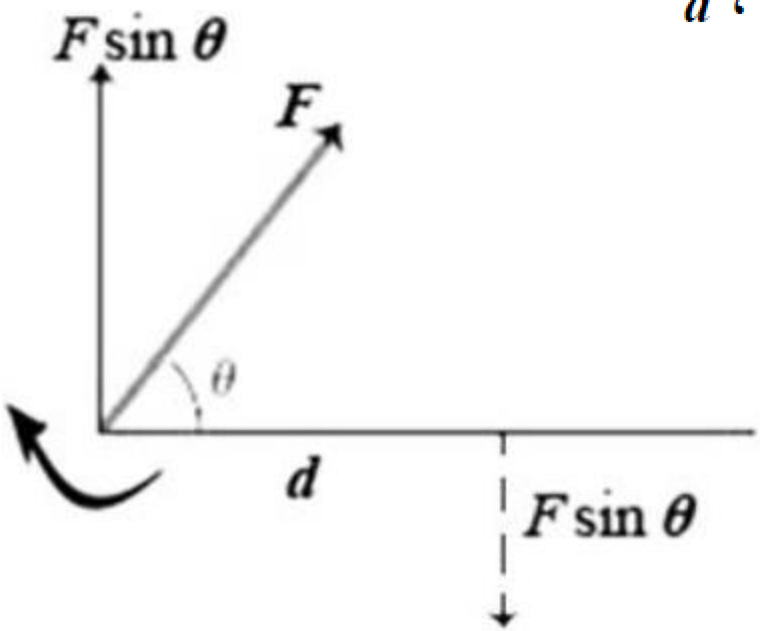
يرمز لمتجهات الوحدة العمودية في إتجاهات المحاور الكارتيزية x ، y ، z على الترتيب

بالرموز $\hat{\imath}\ ,\ \hat{\jmath}\ ,\ \hat{k}$ أو $\hat{x}\ ,\ \hat{y}\ ,\ \hat{z}$.

2-3 حاصل ضرب متجهين :

إذا أثرت قوة $\boldsymbol{F}$ على جسم ما ونتج عن ذلك تحرك الجسم مسافة $\boldsymbol{d}$ في إتجاه ما يصنع زاوية θ مع إتجاه القوة المؤثرة

يمكن الحصول على طريقتين مختلفتين لضرب المتجهين $\boldsymbol{F}$ ، $\boldsymbol{d}$



الأولى هي الشغل المبذول بواسطة القوة ويساوي $Fd\ cos\theta$

$$\boldsymbol{F}.\boldsymbol{d} = Fd\ cos\theta$$

الكمية الثانية هي الإزدواج المؤثر حول محور عمودي على

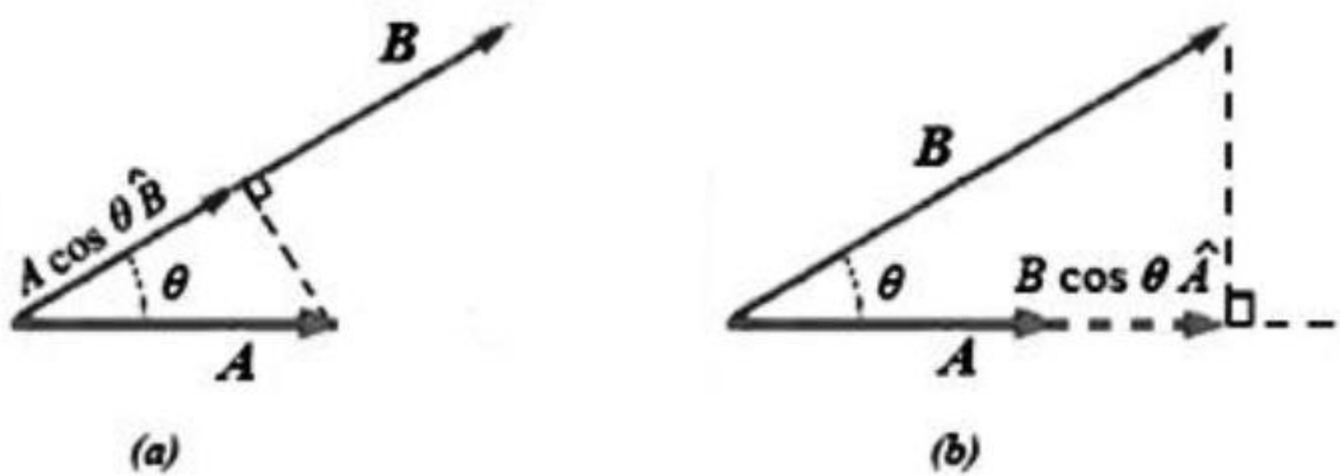
مستوى كل من $\boldsymbol{F}$ ، $\boldsymbol{d}$ والذي قيمته تساوي $Fd\ sin\theta$

$$\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{d} = Fd\ sin\theta\ \hat{n}$$

حيث $\hat{n}$ وحدة متجه في الإتجاه العمودي على مستوى كل من $\boldsymbol{F}$ ، $\boldsymbol{d}$.

2-3-1 الضرب القياسي Scalar product :

يعرف الضرب القياسي للمتجهين $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}$ بأنه حاصل الضرب لمقداري المتجهين وجيب تمام الزاوية بينهما ، أو حاصل الضرب لمقدار أحد المتجهين وقيمة مركبة الآخر عليه



ولما كانت $cos\theta$ عبارة عن دالة زوجية أي أن $cos\theta = \cos(-\theta)$ فإن الضرب القياسي يكون تبادليا :

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = AB\ cos\theta = AB\cos(-\theta) = \boldsymbol{B}.\boldsymbol{A} \qquad (2-4)$$

خصائص الضرب القياسي:

الضرب القياسي يملك خاصية التبادل في الضرب أي أن :

1- $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}.\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}.B\cos\theta\,\hat{A} = \boldsymbol{B}.A\cos\theta\,\hat{B} = AB\cos\theta$

عندما $\begin{cases}\boldsymbol{A}\ or\ \boldsymbol{B} = 0\\ \boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B}\end{cases}$ فإن $\mathbf{2} - \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = 0$

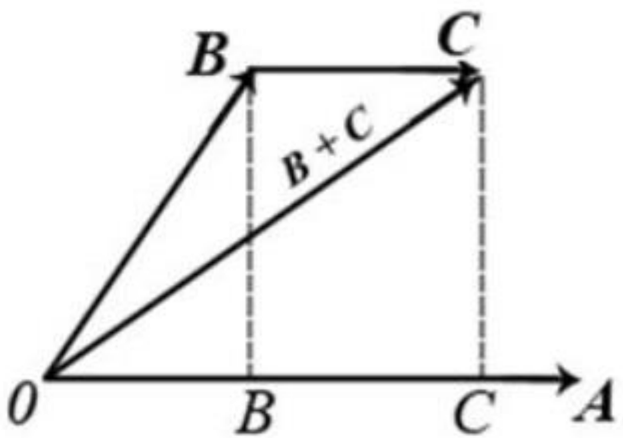
وعندما $A = B$ فإن $\mathbf{3} - \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}.\boldsymbol{B} = A^2 = B^2$

ويكون الضرب القياسي والمتجهي لمتجهات الوحدة كالتالي :

4- $\hat{\imath}.\hat{\jmath} = j.\hat{k} = \hat{k}.\hat{\imath} = 0$

& $\hat{\imath}.\hat{\imath} = i^2 = \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = j^2 = \hat{k}.\hat{k} = k^2 = 1 \qquad (2-5)$

5- الضرب القياسي يملك خاصية التوزيع في الجمع ، فإذا كان لدينا المتجهات $\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{B}$ ،$\boldsymbol{C}$ والتي لا تكون بالضرورة واقعة كلها في مستوى واحد، فإن مركبة محصلة المتجهين $\boldsymbol{B}$ ، $\boldsymbol{C}$ في إتجاه $\boldsymbol{A}$ تساوي مجموع مركبتي المتجهين $\boldsymbol{B}$ ، $\boldsymbol{C}$ في نفس الإتجاه (شكل 5-2)، أي أن :



شكل (5-2)

$$\because \quad OC = OB + BC$$

$$\boldsymbol{A}.(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = A(OC) = A(OB+BC)$$

$$= A(OB) + A(BC) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}.\boldsymbol{C}$$

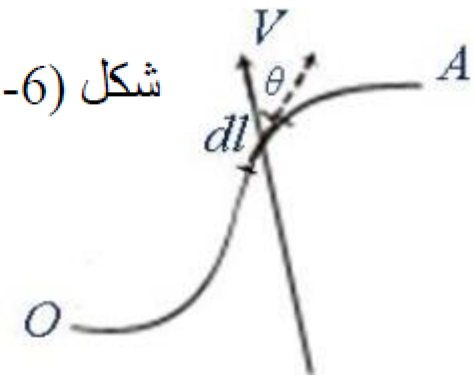
أي أن الضرب القياسي يملك خاصية التوزيع في جمع المتجهات.

ويكتب قانون التوزيع في صورته العامة كالآتي:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\cdots).(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{O}+\cdots) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{N}+\boldsymbol{A}.\boldsymbol{O}+\cdots+\boldsymbol{B}.\boldsymbol{N}+\boldsymbol{B}.\boldsymbol{O}+\cdots$$

2-3-2 التكامل الخطي لحاصل الضرب القياسي لمتجهين Line integral of the scalar products :

إذا كان OA خطا منحنيا مرسوما في مجال إتجاهي وكان $d\boldsymbol{\ell}$ عنصرا للطول عند نقطة ما P على هذا المنحنى (شكل 2-6) ، وبفرض أن $\boldsymbol{V}$ يرمز لمتجه المجال عند هذه النقطة ويصنع زاوية θ مع عنصر الطول $d\boldsymbol{\ell}$ فإن :



شكل (2-6)

$$\boldsymbol{V}.d\boldsymbol{\ell} = V d\ell \cos\theta$$

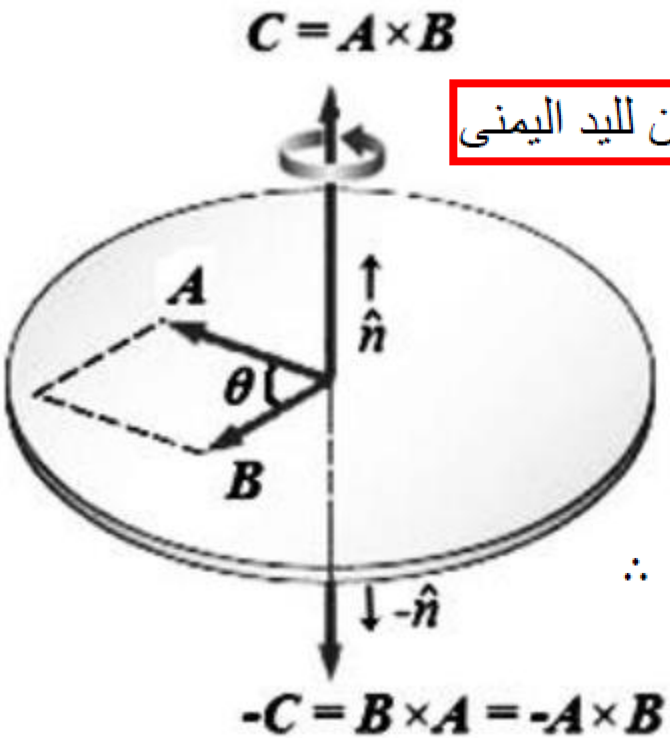
فإذا كان المتجه $\boldsymbol{V}$ يتغير مقدارا وإتجاها من نقطة إلى أخرى خلال المنحنى OA ، فإن القيمة الكلية لحاصل الضرب $\boldsymbol{V}.d\boldsymbol{\ell}$ خلال المنحنى OA تعطى كالتالي:

$$\int_0^A \boldsymbol{V}.d\boldsymbol{\ell} = \int_0^A V d\ell \cos\theta \qquad (2-7)$$

ويسمى هذا التكامل بالتكامل الخطي *line integral* للمتجه $\boldsymbol{V}$ خلال المنحنى OA

إذا كان المتجه $\boldsymbol{V}$ يمثل القوة المؤثرة على جسم معين فإن التكامل
الخط السابق يدل على مقدار الشغل المبذول بواسطة هذه القوة لإزاحة الجسم من النقطة O إلى
النقطة A .

2-3-3 الضرب الإتجاهي لمتجهين The vector product :



قاعدة الحلزون لليد اليمنى

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \qquad (2-8)$$

أي أن الضرب الإتجاهي لا يملك خاصية التبادل

$$\sin\theta = -\sin(-\theta)$$

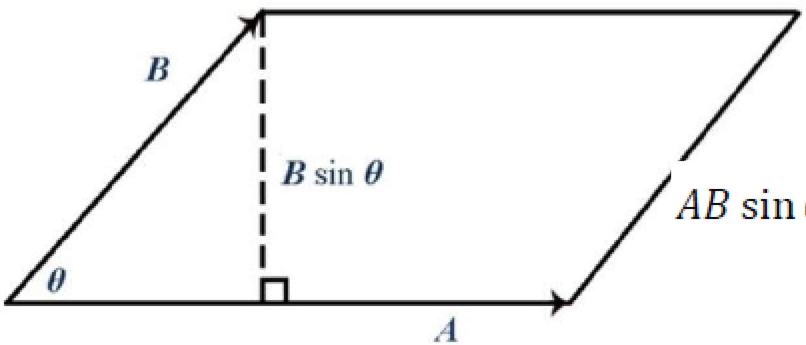
$$\therefore \quad \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = AB\sin\theta\,\hat{n} \qquad (2-9)$$

حيث $\hat{n}$ وحدة متجه في الإتجاه العمودي الموجب على المستوى المكون من المتجهين $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$.

2-3-4 متجه المساحة Vector of area :

حاصل الضرب الإتجاهي $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ والذي يساوي $AB\sin\theta$

يمثل مساحة متوازي الأضلاع الذي طولاه B ، A يحصران زاوية مقدارها θ

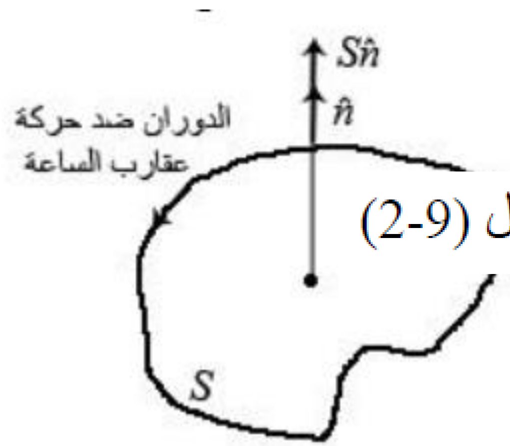


شكل (2-8) : مساحة متوازي الأضلاع = $AB\sin\theta$

وعليه فإن أي عنصر للمساحة S (شكل 2-9) يكون له مقدار وإتجاه ، المقدار يساوي قيمة المساحة والإتجاه هو إتجاه العمودي على مستوى هذه المساحة ، أي أن متجه المساحة $\boldsymbol{S}$ يعطى كالتالي :

$$\boldsymbol{S}=S\hat{n} \qquad (2-10)$$

ومتجه المساحة كأي كمية متجهة ينطبق عليه قواعد تحليل وجمع المتجهات. ولتحديد الإتجاه الموجب للعمودي على المساحة تستخدم أيضا قاعدة الحلزون لليد اليمنى ، حيث يشير الإبهام إلى الإتجاه العمودي الموجب وحركة أصابع اليد العمودية تشير إلى إتجاه الدوران حول السطح.



شكل (2-9)

خصائص الضرب الإتجاهي:

$$1\text{-}\ \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = 0 \qquad if \qquad \begin{cases} \boldsymbol{A}\ or\ \boldsymbol{B} = 0 \\ \boldsymbol{A} \parallel \boldsymbol{B} \end{cases}$$

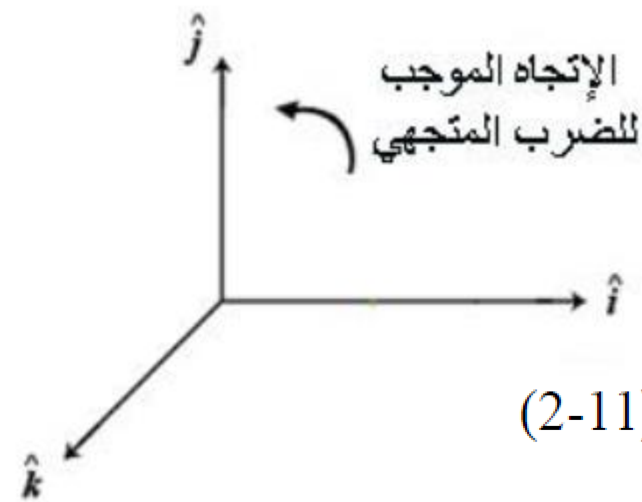
$$2\text{-}\ \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = AB\hat{n} \qquad if \qquad \boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B} \qquad (2-13)$$

$$3\text{-}\ \hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = \hat{k}$$

$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{\jmath} = \hat{\imath}$$

$$\hat{k} \times \hat{\imath} = -\hat{\imath} \times \hat{k} = \hat{\jmath}$$



شكل (2-11)

4- الضرب الإتجاهي يملك خاصية التوزيع للجمع.

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = -(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C})$$

وتكتب قاعدة التوزيع في صورتها العامة كالآتي:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\cdots) \times (\boldsymbol{N}+\boldsymbol{O}+\cdots) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{N} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{O} + \cdots + \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{N} + \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{O} + \cdots \quad (2-13)$$

لأي عدد من المتجهات.

2-3-5 حاصل الضرب القياسي والإتجاهي لمتجهين بدلالة مركباتهما الكرتيزية:

من المعروف أن أي متجه في الفراغ يمكن تحليله إلى مركباته الكرتيزية ، فمثلا المتجهان

$\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ يمكن كتابتهما كالتالي :

$$\boldsymbol{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

$$\boldsymbol{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right).\left(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}\right)$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (2-14)$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right) \times \left(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}\right)$$

$$= \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\hat{\imath} + \left(A_zB_x - A_xB_z\right)\hat{\jmath} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (2-15)$$